

1. Data je površ parametrizacijom $r(u, v) = (\sqrt{5} \cos u \cos v + 3 \cos v, \sqrt{5} \cos u \sin v + 3 \sin v, \sqrt{5} \sin u)$, $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$.

- (a) Odrediti koeficijente prve, druge fundamentalne forme i Kristofelove simbole površi r .

Rešenje.

$$\begin{aligned} r_u &= (-\sqrt{5} \sin u \cos v, -\sqrt{5} \sin u \sin v, \sqrt{5} \cos u) \\ r_v &= (-\sqrt{5} \cos u + 3) \sin v, (\sqrt{5} \cos u + 3) \cos v, 0 \\ r_u \times r_v &= (-\sqrt{5}(\sqrt{5} \cos u + 3) \cos u \cos v, -\sqrt{5}(\sqrt{5} \cos u + 3) \cos u \sin v, -\sqrt{5}(\sqrt{5} \cos u + 3) \sin u) \end{aligned}$$

jedinična normala

$$n = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u)$$

koeficijenti prve fundamentalne forme

$$\begin{aligned} E &= \langle r_u, r_u \rangle = 5 \\ F &= \langle r_u, r_v \rangle = 0 \\ G &= \langle r_v, r_v \rangle = (\sqrt{5} \cos u + 3)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{uu} &= (-\sqrt{5} \cos u \cos v, -\sqrt{5} \cos u \sin v, -\sqrt{5} \sin u) \\ r_{uv} &= (\sqrt{5} \sin u \sin v, -\sqrt{5} \sin u \cos v, 0) \\ r_{vv} &= (-\sqrt{5} \cos u + 3) \sin v, -(\sqrt{5} \cos u + 3) \cos v, 0 \end{aligned}$$

koeficijenti druge fundamentalne forme

$$\begin{aligned} e &= \langle n, r_{uu} \rangle = \sqrt{5} \\ f &= \langle n, r_{uv} \rangle = 0 \\ g &= \langle n, r_{vv} \rangle = (\sqrt{5} \cos u + 3) \cos u \end{aligned}$$

matrice fundamentalnih formi

$$I = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5} \cos u + 3)^2 \end{pmatrix} \quad II = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & (\sqrt{5} \cos u + 3) \cos u \end{pmatrix}$$

Kako je $F = 0$, $E_u = E_v = 0$, $G_v = 0$, lako računamo **Kristofelove simbole** date površi:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= 0, & \Gamma_{12}^1 &= 0, & \Gamma_{22}^1 &= \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5} \cos u + 3) \sin u, \\ \Gamma_{11}^2 &= 0, & \Gamma_{12}^2 &= \frac{-\sqrt{5} \sin u}{\sqrt{5} \cos u + 3}, & \Gamma_{22}^2 &= 0. \end{aligned}$$

- (b) Skicirati površ r i odrediti Gausovu, srednju i glavne krivine.

Rešenje. Iz oblika parametrizacije površi

$$r(u, v) = ((\sqrt{5} \cos u + 3) \cos v, (\sqrt{5} \cos u + 3) \sin v, \sqrt{5} \sin u)$$

jasno je da je u pitanju torus parametrizovan kao rotaciona površ; njegova slika se dobija rotacijom oko z -ose kružnice poluprečnika $\sqrt{5}$, sa centrom u tački 3 x -ose u xz -ravni. Parametar $u \in (0, 2\pi)$ je parametar profilne kružnice i predstavlja ugao između posmatrane tačke i pozitivnog dela x -ose, dok je parametar $v \in (0, 2\pi)$ ugao za koji je zarotirana posmatrana tačka u odnosu na odgovarajuću tačku profilne kružnice. Glavne krivine date površi predstavljaju sopstvene vrednosti matrice

$$II \cdot I^{-1} = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & 0 \\ 0 & (\sqrt{5} \cos u + 3) \cos u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(\sqrt{5} \cos u + 3)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} & 0 \\ 0 & \frac{\cos u}{\sqrt{5} \cos u + 3} \end{pmatrix}$$

i iznose $\kappa_1 = \frac{\sqrt{5}}{5}$, $\kappa_2 = \frac{\cos u}{\sqrt{5} \cos u + 3}$. Gausova krivina površi je

$$K = \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \frac{\sqrt{5} \cos u}{5(\sqrt{5} \cos u + 3)},$$

a srednja krivina

$$H = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} = \frac{10 \cos u + 3\sqrt{5}}{10(\sqrt{5} \cos u + 3)}.$$

Naravno, moguće je prvo izračunati Gausovu i srednju krivinu koristeći formule

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$H = \frac{Eg + eG - 2Ff}{2(EG - F^2)},$$

a onda glavne krivine kao rešenja kvadratne jednačine

$$\kappa^2 - 2H\kappa + K = 0.$$

(c) Izračunati geodezijske krivine koordinatnih linija. Da li su neke od njih geodezijske linije?

Rešenje. Koordinatne linije ovako parametrizovanog torusa su kružnice. Preciznije, u -parametarske krive date sa $v = v_0 \in (0, 2\pi)$ su meridijani

$$\alpha(u) = ((\sqrt{5} \cos u + 3) \cos v_0, (\sqrt{5} \cos u + 3) \sin v_0, \sqrt{5} \sin u), \quad u \in (0, 2\pi),$$

dok su v -parametarske krive date sa $u = u_0 \in (0, 2\pi)$ paralele

$$\beta(v) = ((\sqrt{5} \cos u_0 + 3) \cos v, (\sqrt{5} \cos u_0 + 3) \sin v, \sqrt{5} \sin u_0), \quad v \in (0, 2\pi).$$

Slika površi r je torus bez jednog meridijana i bez jedne paralela, zbog $(u, v) \in (0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$. Da bismo izračunali geodezijsku krivinu koordinatnih linija, potrebno je da ih prirodno parametrizujemo. Prirodni parametar meridijana dat je sa $s = \sqrt{5}u$, tj.

$$\alpha(s) = \left((\sqrt{5} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} + 3) \cos v_0, (\sqrt{5} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} + 3) \sin v_0, \sqrt{5} \sin \frac{s}{\sqrt{5}} \right), \quad s \in (0, 2\sqrt{5}\pi),$$

dok je prirodni parametar paralela dat sa $t = (\sqrt{5} \cos u_0 + 3)v$, tj.

$$\beta(t) = \left((\sqrt{5} \cos u_0 + 3) \cos \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, (\sqrt{5} \cos u_0 + 3) \sin \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, \sqrt{5} \sin u_0 \right), \quad t \in (0, 2(\sqrt{5} \cos u_0 + 3)\pi).$$

Za meridijane vektori brzine i ubrzanja iznose

$$\alpha'(s) = \left(-\sin \frac{s}{\sqrt{5}} \cos v_0, -\sin \frac{s}{\sqrt{5}} \sin v_0, \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \right),$$

$$\alpha''(s) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \cos v_0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \sin v_0, -\frac{1}{\sqrt{5}} \sin \frac{s}{\sqrt{5}} \right),$$

dok je vektor normale površi duž meridijana

$$n(s) = \left(-\cos \frac{s}{\sqrt{5}} \cos v_0, -\cos \frac{s}{\sqrt{5}} \sin v_0, -\sin \frac{s}{\sqrt{5}} \right).$$

Geodezijska krivina meridijana iznosi

$$(\kappa_g)_{v=v_0} = [n(s), \alpha'(s), \alpha''(s)] = 0.$$

Naravno, ovo smo i očekivali jer su svi meridijani geodezijske linije na svakoj rotacionoj površi, pa i na datoj površi r .

Za paralele vektori brzine i ubrzanja iznose

$$\beta'(t) = \left(-\sin \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, \cos \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, 0 \right),$$

$$\beta''(t) = \left(-\frac{1}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3} \cos \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, -\frac{1}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3} \sin \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, 0 \right),$$

dok je vektor normale površi duž paralela

$$n(t) = \left(-\cos u_0 \cos \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, -\cos u_0 \sin \frac{t}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}, -\sin u_0 \right).$$

Geodezijska krivina paralela iznosi

$$(\kappa_g)_{u=u_0} = [n(t), \alpha'(t), \alpha''(t)] = \frac{-\sin u_0}{\sqrt{5} \cos u_0 + 3}.$$

Medju paralelama su geodezijske one za koje $(\kappa_g)_{u=u_0} = 0$, što je ekvivalentno uslovu $\sin u_0 = 0$, tj. $u_0 = 0$ ili $u_0 = \pi$. U pitanju su naravno najmanja i najveća kružnica među paralelama, tj. najbliža i najdalja koordinatnom početku. Ovo je jasno i geometrijski jer jedino one leže u tzv. normalnom sečenju (kolinearni su vektori normale ovih krivih i vektori normale torusa duž njih).

Napomena. Može se dokazati da za geodezijsku krivinu proizvoljno parametrizovane krive γ na površi važi formula

$$\kappa_g = \frac{[n, \gamma', \gamma'']}{\|\gamma'\|^3}.$$

Takođe, postoje i posebne formule za geodezijsku krivinu koordinatnih linija

$$(\kappa_g)_{u=\text{const}} = -\Gamma_{22}^1 \frac{EG - F^2}{G\sqrt{G}}, \quad (\kappa_g)_{v=\text{const}} = \Gamma_{11}^2 \frac{EG - F^2}{E\sqrt{E}}.$$

- (d) Ako je ψ ugao između proizvoljne prirodno parametrizovane geodezijske linije i v -parametarske krive, dokazati da je izraz $(3 + \sqrt{5} \cos u) \cos \psi$ konstantan. Koji ugao zaklapa geodezijska linija sa u -parametarskom krivom?

Rešenje. Neka je $\gamma(s) = r(u(s), v(s))$ proizvoljna prirodno parametrizovana geodezijska linija. Tangentni vektor ove krive je $\gamma' = u'r_u + v'r_v$, dok je vektor brzine proizvoljne v -parametarske krive $\beta(v)$ vektor $\beta' = r_v$. Kako je ψ ugao između ovih vektora brzine krivih na površi r , koristeći poznatu formulu dobijamo

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \frac{\langle \beta', \gamma' \rangle}{\|\beta'\| \cdot \|\gamma'\|} = \frac{I(\beta', \gamma')}{(\sqrt{5} \cos u + 3) \cdot 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5} \cos u + 3} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5} \cos u + 3)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \\ &= (\sqrt{5} \cos u + 3)v'. \end{aligned}$$

Na osnovu izračunatih Kristofelovih simbola, sistem diferencijalnih jednačina geodezijskih linija za datu površ r ima oblik

$$\begin{aligned} u'' + \frac{\sqrt{5}}{5}(\sqrt{5} \cos u + 3) \sin u (u')^2 &= 0, \\ v'' - \frac{2\sqrt{5} \sin u}{\sqrt{5} \cos u + 3} u' v' &= 0. \end{aligned}$$

Druga jednačina ekvivalentna je jednačini

$$(\sqrt{5} \cos u + 3)v'' - 2\sqrt{5} \sin u u' v' = 0.$$

Primetimo da je izraz na levoj strani ove diferencijalne jednačine upravo izvod funkcije $(\sqrt{5} \cos u + 3)^2 v'$, pa je odatle

$$(\sqrt{5} \cos u + 3)^2 v' = C = \text{const.}$$

Zamenjujući $v' = \frac{C}{(\sqrt{5} \cos u + 3)^2}$ u dobijenu jednakost $\cos \psi = (\sqrt{5} \cos u + 3)v'$, lako dobijamo

$$(\sqrt{5} \cos u + 3) \cos \psi = C = \text{const.}$$

Koordinatne krive su međusobno normalne jer je $F = 0$, pa je ugao koji zaklapa geodezijska linija γ sa u -parametarskom krivom jednak $\frac{\pi}{2} - \psi$.

- (e) Dokazati da su sve geodezijske linije na površi r date jednačinama $v = \pm \int \frac{\sqrt{5}C}{(3 + \sqrt{5} \cos u) \sqrt{(3 + \sqrt{5} \cos u)^2 - C^2}} du$, pri čemu je C neka konstanta. Skicirati nekoliko različitih geodezijskih linija na površi r .

Rešenje. Iz uslova da je geodezijska kriva γ prirodno parametrizovana, imamo da duž krive γ važi

$$\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & (\sqrt{5} \cos u + 3)^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = 1,$$

odnosno

$$5u'^2 + (\sqrt{5} \cos u + 3)^2 v'^2 = 1.$$

Kako je $\cos \psi = (\sqrt{5} \cos u + 3)v'$, dobijamo da je $5u'^2 = \sin^2 \psi$, tj. $\sin \psi = \pm \sqrt{5}u'$. Deljenjem izraza

$$v' = \frac{dv}{ds} = \frac{C}{(\sqrt{5} \cos u + 3)^2}$$

$$u' = \frac{du}{ds} = \pm \frac{\sqrt{(\sqrt{5} \cos u + 3)^2 - C^2}}{\sqrt{5}(\sqrt{5} \cos u + 3)}$$

dobijamo

$$\frac{dv}{du} = \pm \int \frac{\sqrt{5}C}{(\sqrt{5} \cos u + 3)\sqrt{(\sqrt{5} \cos u + 3)^2 - C^2}}.$$

Prema tome, moguće je parametrizovati geodezijsku liniju parametrom u pomoću

$$v = \pm \int \frac{\sqrt{5}C}{(3 + \sqrt{5} \cos u)\sqrt{(3 + \sqrt{5} \cos u)^2 - C^2}} du.$$

Naravno, ovo možda nisu jednačine svih geodezijskih na torusu jer su pri ovom postupku izostavljene one geodezijske za koje važi $u' = 0$, tj. geodezijske među v -parametarskim linijama. Videli smo da postoje dve takve geodezijske među paralelama.

2. U poluravanskom modelu $\mathcal{L}^2$ hiperboličke geometrije sa prvom formom $ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{v^2}$ date su tačke $A(3, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $B(3, 3)$ i prave $b : u = 6$, $c : (u - 5)^2 + v^2 = 4$.

- (a) Izračunati ugao između pravih b i c . U kakvom su međusobnom položaju prave AB , b i c ?

Rešenje. Zbog uslova $E = G$ i $F = 0$, koordinate u poluravanskom modelu su konformne, što znači da se čuvaju uglovi iz karte. Prema tome, ugao između pravih b i c u $\mathcal{L}^2$ možemo tražiti kao uglove između euklidske poluprave b i euklidske polukružnice c . Koordinate presečne tačke $\{C\} = b \cap c$ su $(6, \sqrt{3})$, pa je traženi ugao ψ zapravo ugao između b i vektora položaja tačke C . Kako je ψ ugao naspram katete dužine 1 pravouglog trougla čije su stranice dužina 1, $\sqrt{3}$, 2, očigledno je $\psi = \frac{\pi}{6}$. Isti rezultat se dobija i direktno, koristeći parametrizacije pravih b i c i koeficijente prve forme $\mathcal{L}^2$ u tački C .

Prave b i c se očigledno seku. Prava $a = AB$ ima jednačinu $u = 3$ i predstavlja (euklidski) otvorenu polupravu normalnu na u -osu. Zbog toga su prave a i c paralelne, i u euklidskom i u hiperboličkom smislu. Prave a i b su takođe paralelne jer se u euklidskom smislu seku na u -osi koja je granica modela $\mathcal{L}^2$. Prema tome, prave b i c se seku i obe su paralelne pravoj a , što je u kontradikciji sa Plejferovom aksiomom i pokazuje najbitniju razliku hiperboličke geometrije u odnosu na euklidsku geometriju.

- (b) Odrediti središte i dužinu duži AB .

Rešenje. Parametrizacija duži AB je $AB = (3, t)$, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq t \leq 3$. Neka središte duži AB ima koordinate $S(3, t_0)$. Vektor brzine duž prave AB ima koordinate $(0, 1)$ i intenzitet

$$\sqrt{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{v^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{v^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} = \frac{1}{v}.$$

Dužina duži AB je

$$\|AB\| = \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^3 \frac{1}{v} dv = \ln v \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^3 = \ln(3\sqrt{2}).$$

Iz jednakosti dužina duži $\|AS\| = \|BS\|$ dobijamo

$$\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{t_0} \frac{1}{v} dv = \int_{t_0}^3 \frac{1}{v} dv,$$

odakle sledi $\ln t_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{3\sqrt{2}}{2}$ i $t_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Središte duži AB je tačka $S(3, \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}})$.

- (c) Odrediti tačke simetrične tački A u odnosu na prave b i c .

Rešenje. Refleksija u odnosu na pravu b u hiperboličkom smislu je ujedno i euklidska refleksija, pa tačka simetrična tački A u odnosu na pravu b ima koordinate $A'(9, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

Refleksija u odnosu na pravu c u hiperboličkom smislu predstavlja u euklidskom smislu inverziju u odnosu na (polu)kružnicu c . Tačka A'' simetrična tački A u odnosu na pravu c leži na polupravoj OA i zadovoljava $\|OA\| \cdot \|OA''\| = 2^2 = 4$, gde je $O(5, 0)$ centar kružnice c poluprečnika 2. Odavde dobijamo $\|OA''\| = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, pa lako sledi da tražena tačka ima koordinate $A''(\frac{13}{4}, \frac{7\sqrt{2}}{16})$.

(d) Odrediti jednačine normala iz tačke A na pravama b i c .

Rešenje. Normala b' iz tačke A na pravoj b je euklidska polukružnica, pa njen centar mora biti presek prave b i u -ose, tj. tačka $(6, 0)$. Iz uslova da b' sadrži tačku A dobijamo njenu jednačinu

$$b' : (u - 6)^2 + v^2 = \frac{19}{2}.$$

Normala c' iz tačke A na pravoj c je takođe euklidska polukružnica. Iz normalnosti c i c' dobijamo da c' mora sadržati i sliku tačke A pri inverziji u odnosu na c , a to je baš dobijena tačka A'' . Centar polukružnice c' dobija se u preseku (euklidske) simetrale duži AA'' i u -ose, pa njegove koordinate $(a, 0)$ zadovoljavaju $(a - \frac{13}{4})^2 + (\frac{7\sqrt{2}}{16})^2 = (a - 3)^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2$. Rešavanjem poslednje jednačine dobijamo $a = \frac{185}{64}$, pa je jednačina tražene normale

$$c' : (u - \frac{185}{64})^2 + v^2 = \frac{2097}{64^2}.$$

(e) Ispitati da li su (euklidske) homotetije sa centrima na u -osi i v -osi izometrije.

Rešenje. Euklidska homotetija sa centrom $(u_0, 0)$ i koeficijentom $\alpha > 0$ preslikava tačku (u, v) u (u', v') prema formuli $(u', v') = (u, v) + \alpha(u - u_0, v)$, tj.

$$\begin{aligned} u' &= \alpha u + (1 - \alpha)u_0, \\ v' &= \alpha v. \end{aligned}$$

Kako je $du' = \alpha du$ i $dv' = \alpha dv$, važi $ds'^2 = ds^2$, tj. prva forma ostaje nepromenjena pri ovom preslikavanju i ono je lokalna izometrija.

Euklidska homotetija sa centrom $(0, v_0)$ i koeficijentom $\beta \neq 0$ preslikava tačku (u, v) u (u', v') prema formuli $(u', v') = (u, v) + \beta(u, v - v_0)$, tj.

$$\begin{aligned} u' &= \beta u, \\ v' &= \beta v + (1 - \beta)v_0. \end{aligned}$$

Kako je $du' = \beta du$ i $dv' = \alpha dv$, važi $ds'^2 = (\frac{\beta v}{\beta v + (1 - \beta)v_0})^2 ds^2$, tj. prva forma se menja pri ovom preslikavanju i ono nije lokalna izometrija.